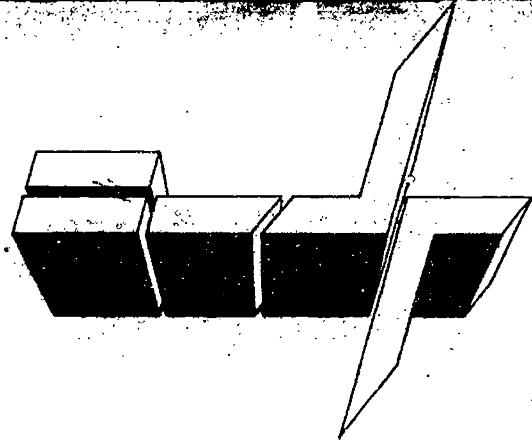
DOCUMENT RESUME

ED 398 084 SE 058 823

AUTHOR	Pochon, Luc-Olivier
TITLE	Mathematique et Informatique, Aspect Didactique (Mathematics and Informatics, the Didactic Aspect).
INSTITUTION	Institut Romand de Recherches et de Documentation Pedagogiques, Neuchatel (Switzerland).
REPORT NO	95.106
PUB DATE	Mar 95
NOTE	30p.; Paper presented at the Annual Meeting of the Association Francophone de Didactique de l'Information (4th, Quebec, Canada, April 8, 1994).
AVAILABLE FROM	Institut Romand de Recherches et de Documentation Pedagogiques, Case postale 54, CH 2007 Neuchatel 7, Switzerland (5 Swiss Francs).
PUB TYPE	Reports - Research/Technical (143) -- Speeches/Conference Papers (150)
LANGUAGE	French
EDRS PRICE	MF01/PC02 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Constructivism (Learning); Elementary Secondary Education; Foreign Countries; History; Mathematics Education; *Symbols (Mathematics)

ABSTRACT

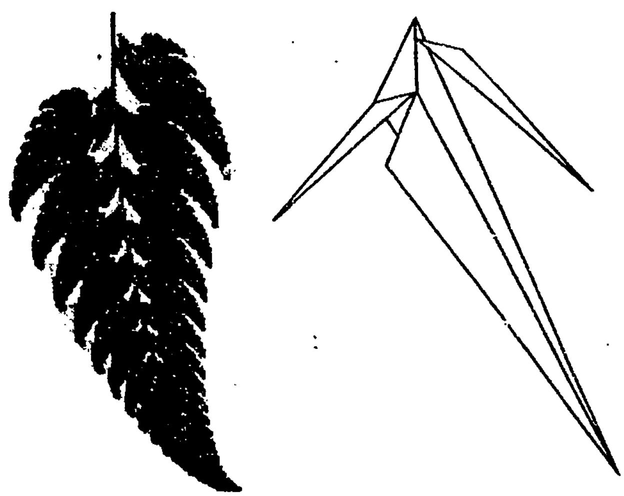
Both mathematics and informatics share common characteristics. Several didacticians propose therefore to define didactic situations permitting learners to "co-construct" knowledge of mathematics and informatics. In this document, the idea is resumed and a certain number of "functional structures" are proposed. These sets of problems take on a special social interest and introduce ideas, methods, and useful techniques to one domain or the other. The junction between the two disciplines is possible thanks to the introduction of equipment for calculations and plotting curves. (Author)



Mathématique et informatique, aspect didactique

Luc-Olivier Pochon

Sujet traité lors de la quatrième rencontre de
l'Association francophone de didactique de l'informatique (AFDI)
tenue à Québec du 6 au 8 avril 1994



RECHERCHES
95.106 - Mars 1995

Mathématique et informatique, aspect didactique

Luc-Olivier Pochon

Sujet traité lors de la quatrième rencontre de
l'Association francophone de didactique de l'informatique (AFDI)
tenue à Québec du 6 au 8 avril 1994

IRDP - INSTITUT ROMAND DE RECHERCHES ET DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUES
Fbg de l'Hôpital 43 CH 2007 Neuchâtel 7 Tél. (038) 24 41 91 Fax (038) 259 947

POCHON, Luc-Olivier. - Mathématique et informatique, aspect didactique : sujet traité lors de la quatrième rencontre de l'Association francophone de didactique de l'informatique (AFDI) tenue à Québec du 6 au 8 avril 1994 / Luc-Olivier Pochon. - Neuchâtel : Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques, 1995. - (Recherches ; 95.106). - Bibliogr. p. 15
Fr. 5.-

Mathématiques
Informatique
Didactique
Historique
Milieu scolaire

Calcul
Graphique
Nouvelles technologies
Nombre
Logiciel

Mathématique et informatique, aspect didactique

Résumé

La mathématique et l'informatique partagent des particularités communes. Plusieurs didacticiens proposent donc de définir des situations didactiques permettant aux apprenants de "co-construire" des connaissances en mathématique et en informatique.

Dans ce document cette idée est reprise et un certain nombre de "cadres fonctionnels" sont proposés. Ce sont des classes de problèmes qui revêtent un intérêt social particulier et qui introduisent des notions, des méthodes et des techniques utiles à l'un ou l'autre des domaines. La jonction entre les deux disciplines peut se faire grâce à l'introduction d'outils de calcul ou de traçage de courbes.

Mathematik und Informatik, didaktischer Aspekt

Zusammenfassung

Mathematik und Informatik enthalten gemeinsame Besonderheiten. Mehrere Didaktiker schlagen deshalb vor, didaktische Situationen zu definieren, welche es den Lernenden erlauben, ihre Mathematik- und Informatikkenntnisse gleichzeitig aufzubauen.

In diesem Dokument wird oberwähnte Idee aufgegriffen und eine gewisse Anzahl "funktioneller Rahmen" werden vorgeschlagen. Dies sind jene Klassen von Problemen die ein besonderes soziales Interesse beinhalten und die in für den einen und den anderen Bereich nützliche Kenntnisse, Techniken und Methoden einführen. Die Verbindung der beiden Disziplinen lässt sich herstellen dank Einführung von Rechenhilfsmitteln oder durch Kurvenentwerfen.

Matematica e informatice, aspetto didattico

Riassunto

La matematica e l'informatica hanno alcune caratteristiche in comune. Molti studiosi di didattica propongono perciò di definire situazioni didattiche che permettano agli studenti di "co-costruire" conoscenze in matematica e in informatica.

Tale idea viene ripresa in questo documento e vi si propone un certo numero di "schemi funzionali". Sono categorie di problemi che rivestono un interesse sociale particolare e che introducono nozioni, metodi e tecniche utili nell'uno o nell'altro campo. Il collegamento tra le due discipline può farsi mediante l'introduzione di mezzi di calcolo o di tracciatura di curve.

Mathematics and informatics, the didactic aspect

Summary

Both mathematics and informatics share common characteristics. Several didacticians propose therefore to define didactic situations permitting learners to "co-construct" knowledge of mathematics and informatics.

In this document, this idea is resumed and a certain number of "functional structures" are proposed. These sets of problems take on a special social interest and introduce ideas, methods and useful techniques to one domain or the other. The junction between the two disciplines is possible thanks to the introduction of equipment for calculations and plotting curves.

Table des matières

Présentation

L'évolution rapide des "nouvelles technologies de l'information" et leur introduction massive dans tous les secteurs de la société, des loisirs à la vie professionnelle, mettent les écoles[1] devant la difficulté de devoir choisir des objectifs prioritaires à poursuivre. Parmi la panoplie des choix possibles, il nous apparaît important d'étudier comment l'intégration de l'informatique aux disciplines permettrait de développer une véritable "culture" informatique qui dépasse l'apprentissage de quelques logiciels de base. Dans ce sens, la mathématique peut apparaître comme une alliée naturelle. Ne pourrait-elle pas contribuer à maintenir des objectifs plus ontologiques dans le domaine de l'informatique ? Cette présentation tente de trouver une réponse à cette question en examinant tout d'abord les rapports qu'entretiennent ou ont entretenu mathématique et informatique en relation avec leur enseignement. Nous examinerons aussi les réponses que pourraient apporter la science elle-même ou la recherche en didactique. Finalement, nous proposerons une solution plus centrée sur les situations à résoudre et tenterons de dégager ce que nous appelons des cadres fonctionnels. Cette perspective a également le mérite de revaloriser la mathématique dans certaines écoles, en introduisant des modèles alternatifs à ceux mis à disposition par l'informatique.

Historique de l'informatique à l'école

Les premiers utilisateurs de l'informatique dans un contexte scolaire étaient souvent des scientifiques, voire des mathématiciens. Mis à part l'EAO, les premières applications, programmation en BASIC et utilisation de LOGO, étaient orientées par la pratique des mathématiques, bien que la composante pédagogique (contexte d'apprentissage, développement de capacités cognitives de base) constituait aussi un pôle important des objectifs poursuivis. Le prosélytisme des précurseurs, lié à l'arrivée en force d'ordinateurs sur les places de travail, et donc l'apparition d'outils "standard", ont favorisé l'intégration de l'ordinateur aux disciplines au prix parfois de certains quiproquos et de déconvenues (les passionnés de programmation se voyant confier des cours d'introduction au traitement de textes, par exemple). Un processus de régulation (coûts/efficacité) ayant joué, on se trouve actuellement dans une période de relative stabilité en ce qui concerne l'informatique[2], la niche privilégiée se situant

---

1 Aucune école, n'est épargnée. Dans les écoles d'informatique, les enseignants et les responsables doivent sans cesse réaménager cours et curriculum. Dans les autres écoles, ces transformations rapides, liées à des problèmes d'ordre budgétaire, peuvent parfois remettre en cause l'introduction de l'ordinateur.

2 En Suisse romande, au niveau primaire, la situation est assez disparate, l'ordinateur est utilisé pour la pratique de l'EAO et dans des pédagogies du projet (journal de classe). Au niveau secondaire inférieur, la situation est plus homogène, tous les élèves reçoivent un cours d'initiation à l'informatique sous diverses formes: pratique du logo, atelier mathématique, utilisation des outils standard. Au niveau des lycées, la tendance est plutôt à la diminution des dotations en informatique alors que l'outil s'intègre de plus en plus fortement dans les formations professionnelles.

principalement au niveau de l'utilisation du traitement de textes et du tableur[3]. Il semble que l'informatique doive se trouver des alliées dans les autres branches et le concept d'intégration mérite d'être analysé soigneusement de ce point de vue[4]. La mathématique fait l'objet de cet essai, mais d'autres choix auraient été possibles.

Mathématique et informatique au niveau de la science

La frontière entre mathématique et informatique est difficile à dresser. Les deux sont des sciences formelles. Elles constituent chacune un réservoir de modèles pour d'autres sciences. La ligne de démarcation est encore plus floue si on se tourne du côté du "grand public": "les mathématiques remplacent les rats" lit-on dans une revue à large diffusion à propos de simulation informatique. Si l'on consulte les mathématiciens, les avis sont fort divers: pour André Delessert, la mathématique commence là où l'informatique finit et les mathématiques doivent, selon lui, marquer ostensiblement ce qui les sépare de l'informatique (Delessert, 1982). Par contre Stephen Wolfram est d'un avis contraire: "il est regrettable que les mathématiques et l'informatique en soient venues à s'opposer intellectuellement alors qu'elles auraient pu être si proches". Cette citation est tirée d'un article de Paul Wellin (1993) de même que la suivante qui elle aborde le problème de l'impact de l'informatique sur la mathématique: "en fait, je crois plus à la vérité qu'à la preuve. A mesure que les mathématiques expérimentales se répandront, l'écart entre vérité et preuve en mathématique, augmentera". Face à ces opinions divergentes, il est intéressant de chercher dans l'histoire des traces de la séparation des communautés (selon un processus décrit par Kuhn (1970)). Nous en avons trouvé une, liée à l'Entscheidungsproblem[5]. La réponse à cette question a été apportée par Church et Turing. La mathématique a principalement gardé le nom de Church attaché à ce résultat (avec sa théorie des fonctions récursives) alors que le travail de Turing (qui introduit la "machine" du même nom) est généralement cité comme un texte de base de l'informatique (voir Hodges (1983) à ce propos). On ne peut donc faire abstraction de l'existence de plusieurs communautés scientifiques, se rejoignant sur certains points et s'opposant sur d'autres. Chacune possède son esthétique, son langage, ses habitus. Chacune offre un cadre pour représenter des situations et des outils pour résoudre des problèmes. Sans compter qu'il n'y a pas qu'une informatique, comme il n'y a pas qu'une mathématique. Le recours aux

---

3 Toutefois, les pratiques réelles sont relativement peu connues et une enquête qui va s'effectuer prochainement pourrait montrer une situation beaucoup plus inventive et variée que ce bref constat ne le laisse supposer. Espérons-le.

4 Le Centre vaudois de recherches pédagogiques a publié un certain nombre d'études concernant l'intégration au différentes disciplines.

5 Les trois questions posées par Hilbert en 1928 concernant les bases des mathématiques et qui reprenaient une question plus ancienne, concernaient la complétude des mathématiques (chaque proposition peut être prouvée ou écartée), leur consistance (aucune proposition peut être à la fois vraie et fausse) et leur décidabilité (existe-t-il une méthode qui permette de produire une décision correcte concernant la véracité d'un proposition ?). Goedel montrait (contrairement à ce que croyait Hilbert) que la mathématique n'est pas complète et que leur consistance ne peut pas être prouvée. Restait la troisième question qui a été abordée (en définissant un processus constructif) par Church et Turing.

sciences constituées pour dégager des lignes de force dans des actions pédagogiques n'offre pas toutes les certitudes que l'on pourrait espérer.

Perspectives didactiques

En suivant l'école française de didactique des mathématiques, issue de la tradition Bachelardienne et qui fait appel à la psychologie de Piaget, la didactique est la partie de la pédagogie qui s'intéresse à la mise en évidence de concepts assimilables, en organise les progressions d'apprentissage, étudie et utilise les obstacles rencontrés par les élèves, analyse les tâches et rend compte des processus d'apprentissages. Les travaux menés en didactique des mathématiques sont nombreux. Dans leur prolongement, des recherches en didactique de l'informatique ont été menées. La plupart concernent LOGO, avec souvent l'étude de l'introduction de la récursivité. D'autres travaux concernent l'introduction de langages de programmation ou d'autres techniques encore. Les actes des rencontres de l'AFDI constituent un recueil riche et intéressant dans le domaine. Malgré l'abondance du matériel, les études mettant en perspective mathématique et informatique sont relativement peu nombreuses. La situation semble donc particulièrement délicate. En particulier, les recherches concernant l'apport de l'informatique dans l'apprentissage de certaines notions (notion de variable, par exemple) n'apportent que des réponses mitigées. Les transferts d'une pratique à l'autre ne se font pas naturellement; ce qui peut expliquer le nombre assez limité de travaux mêlant les deux approches[6]. Janine Rogalski (1990) a posé clairement la question de l'imbrication de la didactique de l'informatique et celle des mathématiques. En particulier, sur la base de particularités communes des mathématiques et de l'informatique, elle propose de définir des situations didactiques permettant aux apprenants de co-construire des connaissances en mathématiques et en informatique. Ceci nous amène à notre propos.

Recherche de situations significatives

Il convient maintenant de se tourner vers les propositions pédagogiques d'intégration. Si d'une manière générale, nous sommes sensible au contexte, tel que le décrit Jean Zahnd (1992), notre perspective sera plus limitée. Elle concernera la mise en évidence de cadres fonctionnels, c'est-à-dire de grandes classes de problèmes qui revêtent un intérêt social particulier et qui introduisent des techniques de résolution de problème utiles (Pochon, 1983). B. Vitale (voir Vitale (1994) pour une bibliographie à ce propos) propose dans ses divers "cahiers" des laboratoires qui poursuivent en grande partie les mêmes buts (voir aussi Ferrario, 1992). Les catégories que nous proposons sont un peu moins ambitieuses. Elles ont toutefois été choisies en vertu d'un triple critère: intérêt mathématique, intérêt informatique et relevance sociale.

Chaque catégorie est située à l'aide d'un problème prototypique. La plupart d'entre

---

6 Les actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique (Laborde, 1988) séparent nettement les travaux concernant la mathématique de ceux de l'informatique, une méthodologie commune assurant toutefois une certaine cohérence à l'ensemble.

eux, ont été utilisés dans des cours de formation continue (formation de programmeurs-analystes). A ce propos, il faut noter que les participants à ces cours ont une certaine habitude de l'ordinateur, mais n'ont souvent que des notions rudimentaires en programmation. Leur formation est principalement centrée sur l'usage, en informatique de gestion, de modèles de traitement de données. Par ailleurs, dans les écoles d'informatique, les mathématiques ont souvent statut de culture générale, vaguement reconnu. La démarche est donc introduite avec un but supplémentaire: celui d'offrir des modèles alternatifs pour représenter des problèmes, les conceptualiser et les traiter.

A noter à titre accessoire que la mathématique numérique a remis en cause certaines théories et outils de calcul tels que ceux liés à la théorie classique des déterminants. L'alternative se présente sous la forme d'une économie de formulation contre une économie de temps de calcul. Toutefois, les techniques de programmation parallèle ou symbolique remettent en selle des méthodes et des théories qui semblaient vouées à l'oubli.

Voici quelques catégories retenues, toutes n'ont pas encore fait l'objet d'une expérimentation détaillée:

Optimisation, ajustement de courbes

Les situations dans cette catégorie sont souvent faciles à résoudre à l'aide de quelques lignes de programmation. L'expérience montre que les résultats obtenus sous forme graphique poussent les apprenants à en comprendre la raison et les incitent à trouver des méthodes plus synthétiques[7].

Dans un théâtre le prix des places est fixé à 8 \$. Pour une représentation on attend 500 spectateurs. On estime que chaque fois que l'on baisse le prix de 25 cts, 50 personnes de plus viendront voir le spectacle. A combien faut-il fixer le prix de la place pour assurer un revenu maximum ? (On suppose dans un premier temps que le nombre de place est illimité).

Matrices et société

Il s'agit du domaine des processus linéaires qui constituent un modèle utile pour représenter et étudier des phénomènes économiques et sociaux (Bradley, 1986). Il utilise un outil élégant: le calcul matriciel. Les rapports entre ce calcul et l'informatique sont divers: reconnu comme un outil conceptuel important par le langage APL, il permet de bien synthétiser un problème et de conserver des invariants. Il est utilisé dans les OCR, les systèmes de dessin assisté par ordinateur, etc. Toutefois, la programmation a tendance à le faire disparaître: programmer une multiplication

---

7 Les brefs commentaires sont établis à partir de protocoles établis par les apprenants selon quatre points: 1) Essais, discussion; 2) Choix des moyens, plan; 3) Démarche e solution; 4) Evaluation, critique. En annexe I, un document présente les résultats de façon plus détaillée.

matricielle ou un système de transformations linéaires revient au même. Par ailleurs, de nombreux résultats (formules de Cramer, par exemple) demandent par trop de détours et sont trop onéreux en temps de calcul. Toutefois, les systèmes formelles et la programmation "parallèle" augmentent le nombre de résultats que l'on peut transposer directement.

Une usine comprend deux secteurs A et B. Les capitaux initiaux des secteurs A et B sont 70 MFrs et 30 MFrs. Grâce à son revenu, à la fin de chaque année, le secteur A peut réinvestir et augmenter son capital de 60%. Par ailleurs, il peut investir une somme représentant le 20% de son capital dans le secteur B. Le secteur B investit chaque année une somme représentant 70% de son capital dans le secteur A. (x_n représentera le capital de A l'an n et y_n sera celui de B). Représentez l'évolution à l'aide du calcul matriciel et étudiez en fonction du temps: $s_n = x_n + y_n$ (capital total); $v_n = s_n/s_{n-1}$ (croissance); $r_n = x_n/y_n$ (importance relative de A et B).

Actuellement, un outil disponible pour effectuer ce travail est DERIVE. Ses performances sont étonnantes eu égard à la modestie des moyens à mettre en oeuvre. Toutefois son utilisation n'est pas toujours aisée. Une première difficulté rencontrée concerne les limites assez floues des possibilités du système. Il accepte des notations erronées (matrice à la puissance une matrice, multiplication d'une matrice 2x2 par une matrice 1x2, etc.). Il faut aussi "l'aider" à simplifier littéralement l'élévation à une puissance d'une matrice diagonale, etc. Du point de vue organisation du travail, les apprenant ont de la peine à garder une vue d'ensemble du travail effectué. Il est nécessaire d'adopter une méthode pour garder une trace des calculs effectués. Par ailleurs, la programmation de fonctions constitue, en soi, un exercice très intéressant, mais inhabituel et difficile (utilisation de la récursivité ou de l'itération d'une application, nécessité d'introduire des variables auxiliaires, etc.). Une solution du problème se trouve en annexe II.

Images et sons

Les images et les sons sont à l'ordre du jour dans le monde de l'informatique avec, à la clé, des algorithmes de compression de données, la génération d'images et de sons de synthèse. Des modèles simples existent qui permettent de montrer le lien important que informatique et mathématique, même classique, entretiennent à ce propos: algorithme de compression de Fibonacci-delta, utilisation d'objets fractals, etc. "Engagez Fibonnaci" aurait ordonné un dirigeant d'IBM apprenant que des ordinateurs d'une firme concurrente étaient plus performants que ceux de sa société.

Le problème prototypique proposé ici, introduit la méthode "Iterated Function System" (IFS) qui offre un moyen de stocker des images avec un rapport de compression très élevé. Cette technique est basée sur la production d'images fractales (Barnsley, 1988).

Représentez dans le plan tous les points obtenus en itérant l'application y = Wx+v

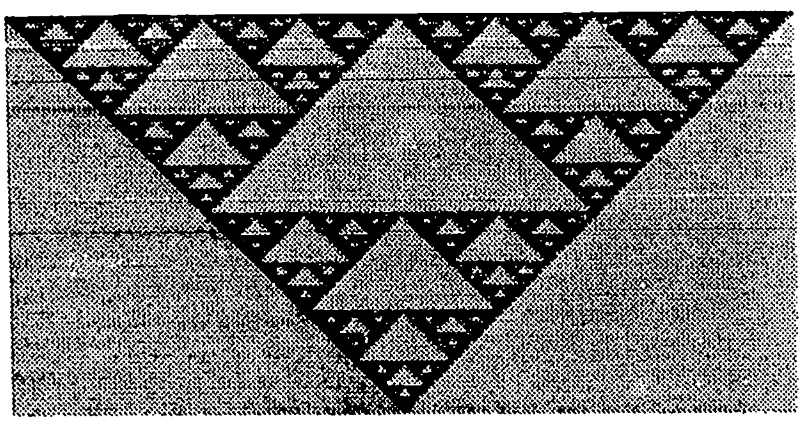
$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Algorithme: x0 point de départ
x := x0
Répéter
choix de W et v selon les probabilités p indiquées
x' := Wx + v
dessin de x'
x := x'

Paramètres pour obtenir le triangle de Sierpinski

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*p*
0,5	*0*	*0*	*0,5*	*0*	*0*	*1/3*
0,5	*0*	*0*	*0,5*	*1*	*0*	*1/3*
0,5	*0*	*0*	*0,5*	*0.5*	*0.5*	*1/3*

C'est une activité qui apparaît magique et qui se révèle très motivante. Il est toutefois difficile de donner une explication satisfaisante du phénomène. C'est l'occasion pour chacun de se trouver des heuristiques convaincantes. On trouvera en annexe III une étude "morphologique" en botanique virtuelle[8].



8 Un petit laboratoire de botanique virtuelle (sous Window), permettant de générer les figures présentées dans l'annexe III, est disponible sur demande.

Combinatoire, théorie des nombres (jeux sur les nombres)

Ce cadre fonctionnel permet d'exploiter une propension naturelle de la nature humaine pour les casse-tête et puzzles divers en stimulant ainsi les capacités d'invention (à la recherche du "ha ha" de Gardner (Gardner,1979)).

Les deux situations sélectionnées n'ont pas encore été expérimentées. La première pose le problème intéressant de trouver un système de codage d'objets tridimensionnels. La deuxième demande pour prétendre à une certaine efficacité, de trouver des bornes aux solutions et de privilégier la combinatoire au calcul.

Combien y a-t-il de pentacubes non superposables ? Un pentacube (pentamino de l'espace) est un solide constitué de cinq cubes (unitaires), de telle manière que tout cube possède au moins une face commune avec un autre cube. Deux cubes ne peuvent pas avoir d'autres éléments en commun qu'une face, une arête ou un sommet.

Trouvez tous les entiers naturels égaux à la somme de leurs chiffres élevés à la puissance n. L'ensemble des entiers satisfaisant la propriété pour un entier n sera noté S_n.

Exemple: $153 \in S_3$ *car* $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$

Cryptage

Le codage de l'information est un thème qui peut donner lieu à de nombreuses activités: traitement du contenu informationnel, correction des erreurs, cryptage, etc. Un des intérêts d'utiliser l'ordinateur pour ces activités est de montrer les contraintes qu'implique le passage des principes de base à des applications pratiques (temps de calcul, entre autres). L'exemple des techniques à clef révélée montre une utilisation commerciale des nombres premiers. Cet exemple est traité en détail dans Pochon (1994). Il met en évidence, à côté des problèmes techniques (la recherche de nombres premiers), de nouveaux problèmes psycho-cognitifs (utilisation de grands nombres).

Simulation

C'est un domaine relativement complexe, si l'on se réfère aux nombreuses facettes qu'il recèle: diversité des modèles, aspects psycho-pédagogiques, outils à disposition (Vitale, 1994). La plupart des jeux de simulation (Sim City) offrent l'accès à certains paramètres, mais cachent malheureusement les modèles utilisés. En voulant partir des fondements des phénomènes (forces plutôt que équation différentielle) un travail de 'programmation' (avec LOGO, par exemple) plus important reste à effectuer (Launaz, Pochon, 1985).

Outils de calcul

Nous nous sommes intéressés aux outils de calcul en essayant de trouver des situations qui permettent de les mettre en oeuvre (perspective fonctionnelle). D'autres approches complémentaires sont possibles. L'une d'entre elle (perspective notionnelle) consisterait à examiner les notions mathématiques en fonction de ces outils. Cela concerne aussi bien la discipline (examen des plans d'étude) que la didactique (définition d'objectifs, planification des apprentissages). Une autre voie (perspective psychologique), moins immédiate, consisterait à mettre en relation opérations de pensée et usage des outils. C'est un vaste sujet qui dépasse le cadre de cette présentation. Il nous apparaît toutefois comme fondamental dans la mesure où il peut fournir un cadre de référence à beaucoup d'autres études (analyse de tâches, observation des réactions des élèves, étude de leurs représentations, etc.). Nous introduirons le sujet en prenant pour référence implicite le cas de la calculette au niveau de la scolarité obligatoire, là où l'enjeu entre le travail à la machine ou "de tête" ou "à la main" est particulièrement bien marqué.

Outils et systèmes symboliques

La question des modes de pensée n'est pas nouvelle. Avec l'arrivée de l'ordinateur, la question de connaître l'influence de la machine sur l'esprit de l'homme a été posée par de nombreux cercles. Les artefacts qui mêlent l'esprit de l'homme à la "matière" éveillent des craintes et espoirs, ils ouvrent des possibilités pour certains, seront source de réduction pour d'autre.

Or des éléments de réponse ou des cadres scientifiques pour étudier le problème existent. Toute la psychologie constructiviste considère l'intelligence comme des actions intériorisées. En ce qui concerne l'usage d'outils, on peut se référer plus particulièrement à l'oeuvre du psychologue Vygotsky (voir par exemple: Schneuwly, Bronckart, 1985) qui montre, en référence à d'autres travaux, que le développement des capacités cognitives est lié à l'intériorisation d'outils sémiotiques forgés par l'usage social. Le langage est un tel outil[9]. D'abord cri, cet outil a été domestiqué pour devenir un mode de communication, puis par intériorisation, un outil de pensée. Le langage des formules en fournit un autre[10]. L'ordinateur par les langages de programmation, la syntaxe des langages de commande, les schémas de manipulation d'icônes fournit donc des "outils" qui influenceraient les processus de pensée[11].

Plus proche de la didactique, le modèle introduit par Gérard Vergnaud (1981) permet d'observer et d'interpréter les actions entreprises par des apprenants en situation de

---

9 On pourra aussi se référer aux travaux de B.L. Whorf (1956) à ce propos.

10 Il vaudrait la peine de réexaminer certains apprentissages du calcul formel en regard de cette théorie qui explique les difficultés des élèves liées à des conventions dont il est difficile de leur faire revivre la genèse.

11 Dans cette théorie les transferts sont réduits à une portion congrue ce qui correspond bien au constat général !

résolution de problèmes. Selon le schéma de G. Vergnaud, les représentations mentales que les enfants ont du problème, guident les actions et sont fortement conditionnées par elles. Les représentations correspondent à certains schèmes d'actions conditionnés par le langage utilisé: langage naturel, représentation imagée écriture algébrique. Dans un premier temps ces schèmes sont quasiment indissociables de certains problèmes types. "... on peut dire que la pensée consiste à la fois en opérations conceptuelles et préconceptuelles sur les signifiés et en opérations symboliques sur les signifiants, lesquels signifiants forment plusieurs systèmes symboliques distincts, ayant des liens entre eux et avec le signifié". (p 201).

Il est intéressant d'étudier la simple calculette de ce point de vue. F. Conne et J.-M. Favre (1993), en suivant le modèle de Vergnaud (1981), ont donné à la calculatrice le statut d'un langage particulier. Et, les travaux réalisés avec des calculatrices fournissent de nombreux exemples de cette hypothèse. Par exemple, pour de jeunes élèves (entre 10 et 11 ans) les parenthèses de la calculatrice ne sont pas celles de leur livre de mathématique, la problématique de la vérification d'un résultat n'est pas la même que l'on dispose d'une calculatrice ou pas. La calculatrice n'est donc pas un outil didactique, dont l'usage prolonge les activités classiques ! Il en découle que l'introduction d'outils de calcul ne peut pas constituer qu'une demi-mesure. L'école ne devra-t-elle, pas choisir comme elle l'a déjà fait en remplaçant les bouliers par des algorithmes de calcul ?

Conclusion

Il est difficile de situer la science informatique: science du traitement rationnel de l'information ? Science de l'ordinateur ? On assiste à l'émergence d'une mathématique expérimentale. Mais l'informatique mathématique apparaît aussi de plus en plus importante avec l'apparition des systèmes symboliques. Comment les écoles peuvent-elles tenir compte de cette évolution ? Une proposition serait de centrer les curriculums sur des cadres fonctionnels, c'est-à-dire des classes de problèmes importants du point de vue de leur contenu, leur histoire, etc. Toutes les implications de cette proposition n'ont de loin pas encore été entrevues.

Références

Barnsley, M.F. & Sloan, A.D. (1988). A Better Way to Compress Images. *Byte, janvier*, 215-223.

Bradley, I. & Meek, R.L. (1986). *Matrices and Society*. Harmondsworth: Penguin Books.

Delessert, A. (1982). Les mathématiques face à l'informatique. In *Visages de l'informatique* (pp. 19-28). Lausanne: Payot (Publication de l'Université de Lausanne).

Favre, J.-M. (1993). Utilisation de la calculette dans la formation du concept de multiplication dans l'enseignement spécialisé. *Math-Ecole, 156*, 27-29.

Ferrario, M. (1992). *Activités LOGO*. Bienne: Ecole normale.

Gardner, M. (1979). *"Haha" ou l'éclair de la compréhension mathématique*. Paris: Bibliothèque pour la science.

Hodges, A. (1983). *Alan Turing, the enigma of intelligence*. London: Counterpoint.

Kuhn, T.S. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Laborde, C. (éd.). (1988). *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: Pensée sauvage.

Pochon, L.-O. (1983). Vers la définition de cadres fonctionnels pour l'enseignement mathématique. In J.-F. Perret, *Mathématique et réalité: regard sur le contenu des activités mathématiques à l'école primaire*, (pp. 41-47). Neuchâtel: Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques. (IRDP/Recherches 83.10).

Pochon, L.-O. (1985). *Quelques projets pour Logo*. Neuchâtel: Centre professionnel du littoral neuchâtelois (Publication du groupe pour une utilisation didactique de l'ordinateur 2).

Pochon, L.-O. (1994). A propos de codage. *Bulletin (Société des enseignants neuchâtelois de sciences), 17*, 9-14.

Rogalski, J. (1990). La didactique de l'informatique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9, 3, 407-425.

Rossion, P. (1982). Les maths remplacent les rats. *Science & Vie*, 47-49.

Schneuwly, B., Bronckart, J.-P. (éds.). (1985). *Vygotsky aujourd'hui*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé (Textes de base en psychologie).

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: P. Lang.

Vitale, B. (1994). Modélisation qualitative et quantitative. Un exemple d'intégration de l'informatique à la pratique pédagogique : les bases de la pensée écologique. *Bulletin (Société des enseignants neuchâtelois de sciences), 17*, 1-8.

Wellin, P. (1994). Un entretien avec Stephen Wolfram. *Bulletin (Société suisse des professeurs de mathématique et physique), 64*, 36-43.
L'article original en anglais a paru dans la revue "Mathematica in education", Vol. 2, No 2, 1992-1993.

Whorf, B.L. (1956). *Language, thought and reality*. Cambridge: MIT Press.

Zahnd, J. (1992). Enseignement de l'informatique et contextualisation scolaire. In *Actes de la troisième rencontre francophone de didactique de l'informatique, Sion, du 6 au 11 juillet 1992* (pp. 177-184). Paris: EPI.

I. *Recherche d'un optimum, analyse d'une situation*

II. *Calcul matriciel*

III. *Une étude morphologique des "fougères virtuelles"*

Annexe I : *Recherche d'un optimum, analyse d'une situation*

0) Enoncé

Dans un théâtre le prix des places est fixé à 8 US$. Pour une représentation on attend 500 spectateurs. On estime que chaque fois que l'on baisse le prix de 25 cts, 50 personnes de plus viendront voir le spectacle. A combien faut-il fixer le prix de la place pour assurer un revenu maximum ? (On suppose dans un premier temps que le nombre de place est illimité).

1) Approche du problème et déroulement général

Ce protocole résume les travaux réalisé en 2 heures. L'arbitraire des 500 spectateurs et de la prévision d'augmentation crée quelques hésitations relativement vite levées. Le revenu supposé est calculé facilement. Le problème principal, celui des compensations diverses n'est pas perçu toujours facilement. Dès cet obstacle franchi, l'idée de réaliser un tableau vient assez naturellement. Cette activité est menée parfois jusqu'à obtenir une solution. La plupart du temps elle est arrêtée pour faire place à une réflexion de comment obtenir une méthode générale.

La relation $(x-0,25)(y+50)$ est alors souvent posée avec diverses variantes:

$(x-0,25)(y*0.25+50)$, ...

La signification à donner à x et y n'est pas évidente.
Comment opérationnaliser $(x-0,25)(y + 50) < xy$?
Comment exprimer la relation entre x et y ? Il est noté que cette dernière doit se formuler sous la forme d'une dépendance linéaire: $y = ax + b$.

2) Solutions proposées

a) Passage par un programme informatique

L'idée est de réaliser une boucle contrôlée par la relation: $xy < (x + 50)(y - 0,25)$

```
PROGRAM theatre (Input,Output) ;
VAR
   nb_pers : Integer ;
   prix : Real ;
   total1 : Real ;
   total2 : Integer ;
BEGIN
   nb_pers := 500 ;
   prix := 8 ;
   WHILE (nb_pers * prix) < ((nb_pers + 50) * (prix - 0.25)) DO
   BEGIN
      nb_pers := nb_pers + 50 ;
      prix := prix - 0.25 ;
   END ;
   Writeln ('Il faut ',nb_pers,' personnes') ;
   Writeln ('pour un prix d''entree de ',prix:1:2) ;
END .
```

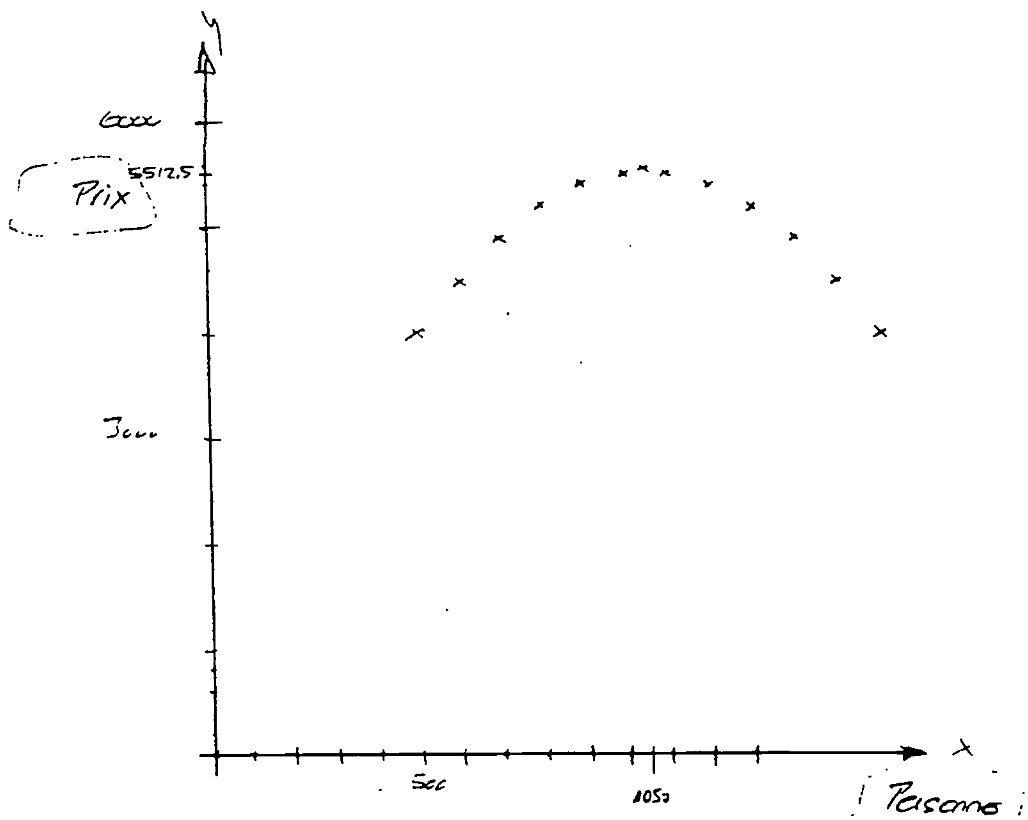
Ce programme donne le résultat: 1050 personnes pour un prix d'entrée de 5,25 US$

b) Recherche de tous les cas possibles

Elle s'effectue sur la base d'un tableau:

Nb de personnes	prix unitaire	prix total
1100	5	5500
1000	5,5	5500
900	6	5400
800	6,5	5200
700	7	4900
600	7,5	4500
500 :	8	4000.-

Dans ces deux premiers cas, après avoir obtenu les différents revenus, l'idée de les représenter sur un graphe est courante. On s'aperçoit alors que le revenu maximum est un sommet de la courbe. L'idée vient alors de chercher l'équation d'une parabole qui rend compte des données. Comment obtenir cette parabole directement ?



Equation de la parabole obtenue "expérimentalement"

$y = a\,(x - 1050)^2 + 5512{,}50$

Cette expression donne une relation entre le nombre de personnes (x) et le revenu (y). Le coefficient a (qu'il s'agit d'établir sachant que pour $x = 500$, $y = 4000$) est facilement oublié. (ici $a = -0{,}005$).

c) Recherche d'un accroissement nul des revenus

Recherche de la dépendance entre x et y:

$y = mx + h$

$500 = m\,8 + h$
$700 = m\,7 + h$

donc I: $y = -200x + 2100$

Recherche d'un accroissement nulle:

$xy = (x-0,25)(y+50) ==> 0,25y - 50x = 0$

donc II: $y = 200x$

De I) et II) on tire $x = 5,25$ et $y = 1050$

d) Recherche d'une relation algébrique

L'idée est d'introduire un paramètre (t) donnant le nombre de tranches de 50 personnes. Avec ce paramètre, le revenu R est donné par:

$R = (8 - 0,25\,t)(500 + 50t) = -12,5\,t^2 + 275\,t + 4000$

C'est une parabole. La recherche du sommet donne $m = 11$ et $h = 5512,50$.
On passe de cette équation à celle de la parabole expérimentale en introduisant dans cette dernière: $x = 500 + 50t$ (lien entre nombre de personnes et nombre de tranches).

e) EUREKA

Les contraintes suivantes peuvent être introduites dans EUREKA:

```
Revenu = (8 - 0,25 * t)*(500 + 50 * t)
$ max(Revenu)
```

Ou même de façon plus globale:

```
f(x) := a * x + b   ; liaison entre prix (x) et nombre de spectateurs
f(8) = 500
f(7.75) = 550

Revenu = f(x)*x
$ max(Revenu)
```


21

Annexe II : *Calcul matriciel*

L'énoncé de la situation se trouve à la page 9.

Les formules seront présentées sous la forme de la ligne de commande sachant que, après interprétation, la disposition dans la fenêtre est quelque peu améliorée!

Introduction de la matrice d'évolution: a:=[[1.6, 0.7],[0.2, 1]]

Elle apparaîtra sous la forme:

$$a := \begin{bmatrix} 1.6 & 0.7 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

Valeur initiale : b:=[70,30]

Les données sont présentées sous la forme d'un vecteur ligne, plus facile à écrire et prenant moins de place à l'écran.

Opérateur d'évolution: F(v) := v . a'

Il utilise la matrice transposée de la matrice pour pouvoir utiliser des vecteurs lignes.

Opérateurs auxiliaires:

S(v):=ELEMENT(v,1)+ELEMENT(v,2)
R(v):=ELEMENT(v,1)/ELEMENT(v,2)

Ces opérateurs consistent à prendre la somme et le quotient des composantes d'un vecteur.

La structure de donnée choisie pour la suite, quelque peut exotique, est un "vecteur" constitué de: [[x_n, y_n], s_n, v_n, r_n]. Alors que les premiers langages de programmation utilisaient les structures mathématiques classiques (principalement vecteurs et tableaux), les environnements actuels favorisent l'usage de structures plus complexes.

La valeur initiale est: i:=[[70,30],100,1,70/30]

Opérateur permettant de passer d'une année à l'autre:

G(w):=[w_:=F(ELEMENT(w,1)),s_:=S(w_),s_/ELEMENT(w,2),R(w_)]

Il permet de calculer $[[x_{n+1}, y_{n+1}], s_{n+1}, v_{n+1}, r_{n+1}] = G([[x_n, y_n], s_n, v_n, r_n]) = [F([x_n, y_n]), S([x_n, y_n]), s_n/S([x_n, y_n)], R([x_n, y_n])]$.

Itération de l'opération: ITERATION(G(w),w,i,20)

Les résultats après approximation (6 chiffres significatifs)

[70, 30]	100	1	2.33333
[133, 44]	177	1.77	3.02272
[243.6, 70.6]	314.2	1.77514	3.45042
[439.18, 119.32]	558.5	1.77753	3.68069
[786.212, 207.156]	993.368	1.77863	3.79526
[1402.94, 364.398]	1767.34	1.77914	3.85004
[2499.79, 644.988]	3144.78	1.77938	3.87572
[4451.16, 1144.94]	5596.11	1.77949	3.88765
[7923.32, 2035.18]	9958.50	1.77954	3.89318
[14101.9, 3619.84]	17721.7	1.77956	3.89573
[25097.0, 6440.23]	31537.2	1.77957	3.89690
[44663.3, 11459.6]	56123.0	1.77957	3.89745
[79483.1, 20392.3]	99875.4	1.77958	3.89770
[1.41447 10^5, 36288.9]	1.77736 10^5	1.77958	3.89781
[2.51718 10^5, 64578.4]	3.16297 10^5	1.77958	3.89787
[4.47954 10^5, 1.14922 10^5]	5.62876 10^5	1.77958	3.89789
[7.97173 10^5, 2.04513 10^5]	1.00168 10^6	1.77958	3.89790
[1.41863 10^6, 3.63947 10^5]	1.78258 10^6	1.77958	3.89791
[2.52458 10^6, 6.47675 10^5]	3.17225 10^6	1.77958	3.89791
[4.49270 10^6, 1.15259 10^6]	5.64529 10^6	1.77958	3.89791
[7.99513 10^6, 2.05113 10^6]	1.00462 10^7	1.77958	3.89791

Aspect théorique

Equation caractéristique: DET(a-alpha*[[1,0],[0,1]])

Après simplification on trouve (50*alpha^2-130*alpha+73)/50 dont les solutions (valeurs propres) sont:

alpha=13/10-SQRT(23)/10
alpha_=SQRT(23)/10+13/10

Recherche des vecteurs propres:

8*x/5+1/5=x*(SQRT(23)/10+13/10)
y/5+8/5=13/10-SQRT(23)/10

Ces équations s'obtiennent en coupant et collant des éléments du système d'équations a-alpha*[[1,0],[0,1]]. Cette étape nécessite une planification soignée et une bonne vue d'ensemble de la méthode. Les solutions sont: x=SQRT(23)/7+3/7, y=-SQRT(23)/2-3/2, ce qui permet de définir la matrice de changement de base.

23

Matrice de changement de base: p_:=[[1,-SQRT(23)/2-3/2],[SQRT(23)/7+3/7,1]]

En clair, la matrice est:

$$p\_ := \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-\mathrm{SQRT}(23) - 3}{2} \\ \dfrac{\mathrm{SQRT}(23) + 3}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice associée: p_ . a . 1/p_

La simplification donne bien une matrice diagonale:
[[13/10-SQRT(23)/10,0],[0,SQRT(23)/10+13/10]]. En clair:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{13 - \mathrm{SQRT}(23)}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{13 + \mathrm{SQRT}(23)}{10} \end{bmatrix}$$

Calcul de $V(n) := [x_n, y_n]$ $(= a^n\ V(0) = p^{-1}\ b^n\ p\ V(0)\ )]$:
V(n) := 1/p_ .[[13/10-SQRT(23)/10,0],[0,SQRT(23)/10+13/10]]^n .p_ . b'

Le système ne parvient pas à une formule simple. Il faut donc tâtonner pour trouver une formule que le système saura résoudre de façon optimale.

La simplification de:
p_^(-1)*[[(13/10-SQRT(23)/10)^n,0],[0,(SQRT(23)/10+13/10)^n]] . p_ . [[70],[30]]
amène a une forme plus "acceptable":

[[(SQRT(23)/10+13/10)^n*(210*SQRT(23)/23+35)+(35-210*SQRT(23)/23)*(13/10-SQRT(23)/10)^n],
[(SQRT(23)/10+13/10)^n*(25*SQRT(23)/23+15)+(15-25*SQRT(23)/23)*(13/10-SQRT(23)/10)^n]]

Approché à deux décimales:

x_n = 78,79 * 1,78^n - 8,79 * 0,82^n

y_n = 20,21 * 1,78^n + 9,79 * 0,82^n

Annexe III : *Une étude morphologique des "fougères virtuelles"*[11]

Il pourrait être plus facile de procéder à une étude des variations du triangle de Sierpinski (quoique des effets de superposition rendent l'analyse parfois délicate). Toutefois l'étude de la fougère est la plus motivante !

Une fougère classique est donnée par le jeu de nombres ci-dessous. L'algorithme donné en page 10 génère l'image de la figure 1.

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0,16	0	0	0,01
0,2	-0,26	0,23	0,22	0	1,6	0,07
-0,15	0,28	0,26	0,24	0	0,44	0,07
0,85	0,04	-0,04	0,85	0	1,6	0,85

Fig. 1

[11] Idée développée avec Alain Favre, directeur de la Société Analyse et Archivage d'Images (A^2I), CH-1510 Moudon.

Etude à partir des opérateurs

La partie linéaire des transformations est donnée par les matrices :

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}16 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}26 \\ 0{,}23 & 0{,}22 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}28 \\ 0{,}26 & 0{,}24 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

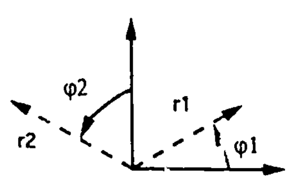
Toutes ces opérations sont contractantes (valeurs propres de module inférieur à 1). A une homothétie près, la première fournit une projection, les deuxième et quatrième sont presque des rotations et la troisième une symétrie (son déterminant est négatif).[12]

---

[12] Chaque opérateur peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} r_1 \cos \varphi_1 & -r_2 \sin \varphi_2 \\ r_1 \sin \varphi_1 & r_2 \cos \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de bien se représenter l'effet de la transformation sur un système d'axe, comme le montre le schéma ci-dessous.



Par ailleurs, on peut comparer la transformation à une rotation et à une homothétie en calculant son "défaut" de rotation: $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ et son défaut d'homothétie: $dr = r_2 / r_1$. Pour les opérateurs w_1, w_2 et w_3 on a:

Opérateur	φ_1	φ_2	$d\varphi$	r_1	r_2	dr
w_1	49°	49,8°	0,8°	0,30	0,34	1,13
w_2	119°	-49,4°	-168,4°	0,30	0,37	1,29
w_3	2,7°	2,7°	0°	0,851	0,851	1

Les transformations affines associées sont données par: $f_i(v) = w_i * v + v_i$ où

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

Chacune de ces applications affines a un "point fixe" qui est aussi le centre de l'application linéaire associée[13].

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} -6,08 \\ 1,87 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,63 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2,66 \\ 9,95 \end{pmatrix}$$

Le domaine fondamental D est le quadrilatère construit sur ces quatre sommets. La figure 2 donne ce domaine fondamental et ses images par les applications f_i. L'origine du système est en haut à gauche et les unités ont un rapport de 1,6 entre elles, ceci pour tenir compte du format des écrans d'ordinateur.

La figure montre bien l'action de chacune des applications affines. f_3 développe la fougère longitudinalement, f_1 crée le feuillage de gauche (image de la fougère tout entière !), f_2 crée celui de droite (avec un effet de symétrie et d'alternance), f_0 s'occupe de la tige.

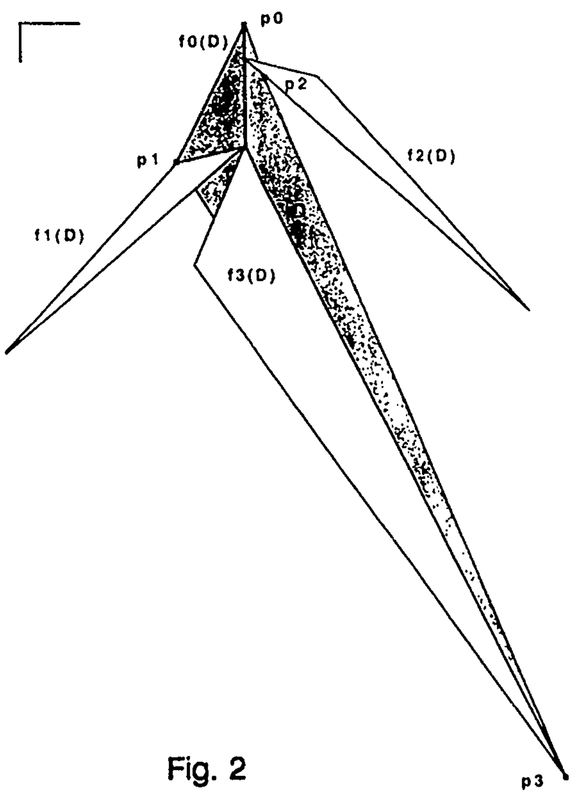


Fig. 2

<u>Etude par variation des paramètres</u>

L'action des différents opérateurs peut être aussi mise en évidence en modifiant les paramètres, ce qui est chose aisée lorsque les moyens de calcul sont à disposition !

Modification des fréquences d'utilisation des opérateurs

En augmentant la fréquence d'utilisation des opérateurs f_0, f_1, f_2 au détriment de f_3, on obtient la "plante" de la figure 3.

13 $f_i(v) = w_i * v + v_i = w_i * (v - p_i) + p_i$

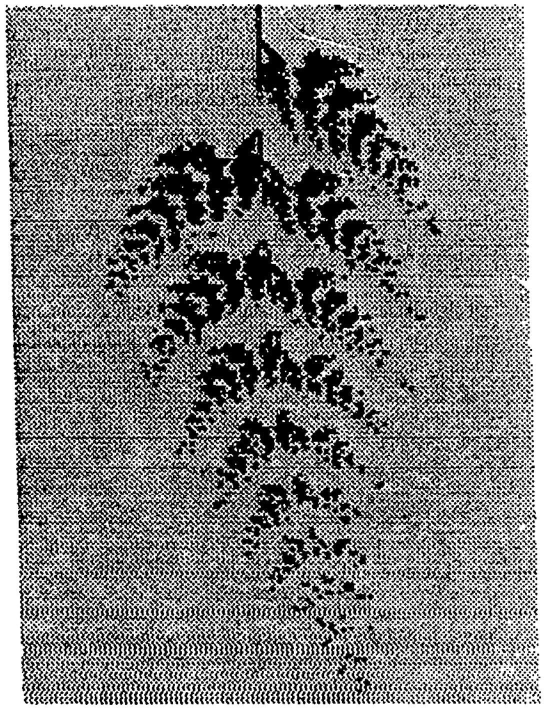
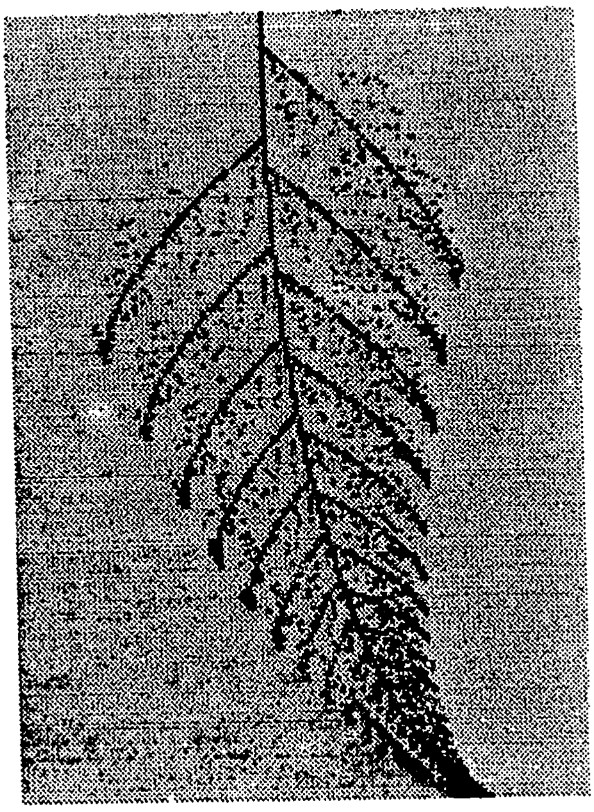


Fig. 3

$p_0 = 0.04$; $p_1 = 0.32$;
$p_2 = 0.24$; $p_3 = 0.40$

On observe une "dissolution" de la plante à son extrémité. Par contre, si on augmente la fréquence de f_0 au détriment de f_1 et de f_2 c'est le feuillage qui disparaît (figure 4).



$p_0 = 0.10$; $p_1 = 0.02$;
$p_2 = 0.02$; $p_3 = 0.85$

Fig. 4

Modification des opérateurs

On va encore procéder à quelques modifications de w_3 et voir ainsi son influence sur l'aspect longitudinal de la fougère (et par conséquent du feuillage !).

La figure 5 correspond à l'opérateur:

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0.85 & -0.04 \\ 0.04 & 0.85 \end{pmatrix}$$

La rotation a lieu dans l'autre sens. On voit comment ce mouvement se propage au feuillage.

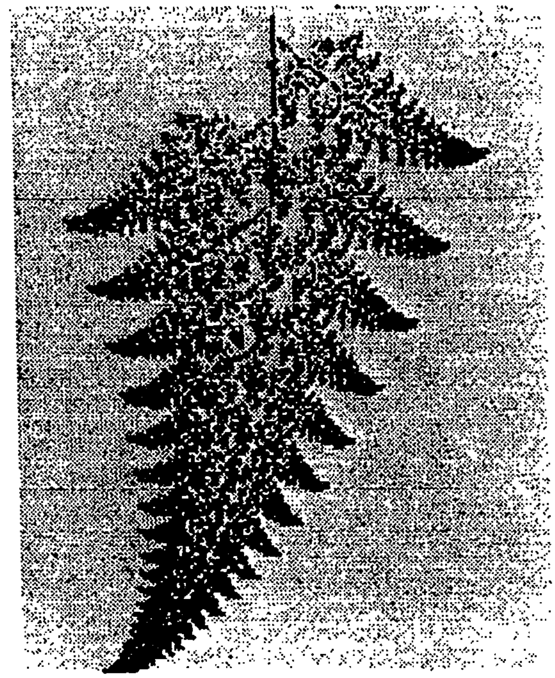
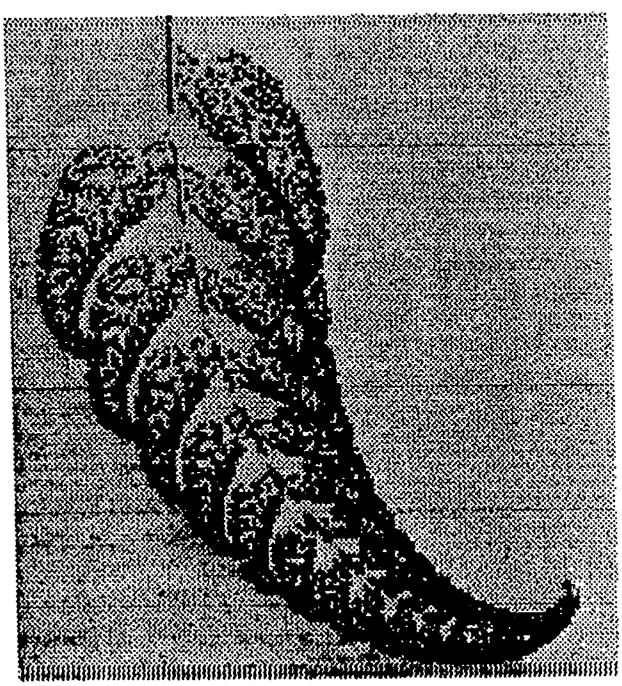


Fig. 5

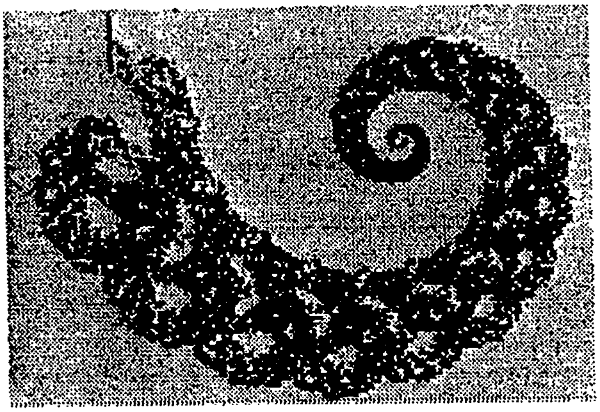


La figure 6 correspond à l'opérateur:

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 \\ -0.10 & 0.85 \end{pmatrix}$$

L'effet de rotation a été accentué ($\varphi_1 = \varphi_2 = -6{,}7^\circ$; $d\varphi = 0$; $r_1 = r_2 = 0{,}856$; $dr = 1$).

Fig. 6



La figure 7 correspond à l'opérateur:

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.32 \\ -0.30 & 0.85 \end{pmatrix}$$

Le même effet est encore augmenté. Une déformation importante du feuillage est observée, due à un effet de recouvrement. ($\varphi_1 \approx \varphi_2 = -20{,}6°$; $d\varphi \approx 0$; $r_1 \approx r_2 = 0{,}91$; $dr \approx 1$).

Fig. 7

La figure 8 correspond à l'opérateur :

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix}$$

La plante est moins touffue, l'effet est dû à un défaut de rotation positif et surtout à un défaut d'homothétie assez important, ce qui favorise une direction de croissance
($\varphi_1 = -3{,}8°$; $\varphi_2 = -2{,}7°$; $d\varphi \approx 1°$; $r_1 = 0{,}601$; $r_2 = 0{,}851$; $dr = 1{,}42$).

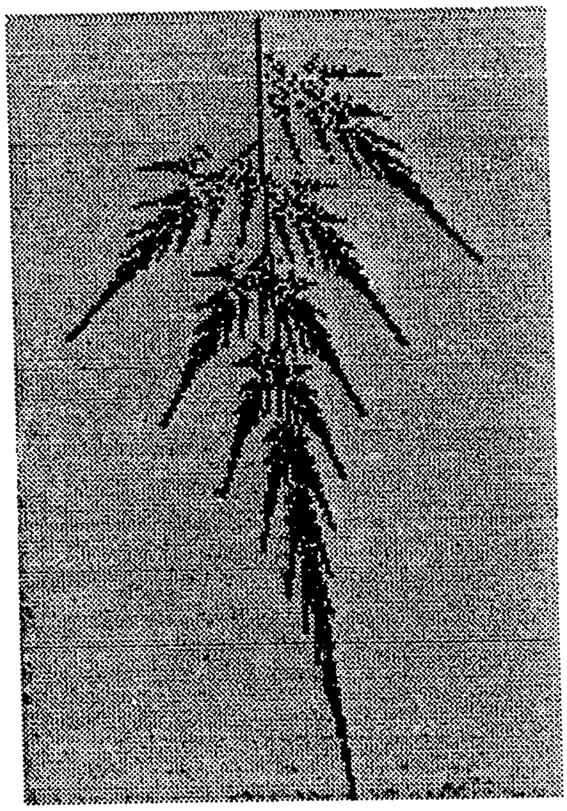


Fig. 8

L'espace, assez anodin, des transformations affines devient soudainement un monde extraordinairement riche à explorer! L'ordinateur, permet d'aborder des structures mathématiques abstraites, tout en gardant le plaisir de la manipulation des nombres.